第 3 章　复数

3.1　复数的概念

1. A　【解析】由题意得$\begin{cases}x+y=2,\\x-y=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$则 $xy=1$.

2. A　【解析】$-3+i$ 的虚部为 1，$3i+i^2=-1+3i$ 的实部为-1，故所求复数的实部为 1，虚部为-1，即 $1-i$.

3. A　【解析】因为复数 $z=m^2-25+(m-5)i$ 是纯虚数，则$\begin{cases}m^2-25=0,\\m-5\neq0,\end{cases}$解得 $m=-5$. 故选 A.

4. B　【解析】当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时，$a+bi$ 是纯虚数；若 $a+bi$ 是纯虚数，则 $a=0$ 且 $b\neq0$，则"$a=0$"是"复数 $a+bi$ 是纯虚数"的必要不充分条件.

5.【解】(1) 因为 $z=\dfrac{a^2-7a+6}{a+1}+(a^2-5a-6)i(a\in\mathbf{R})$ 为实数，

所以$\begin{cases}a^2-5a-6=0,\\a+1\neq0,\end{cases}$解得 $a=6$，

所以当 $a=6$ 时，z 为实数.

(2) 因为 $z=\dfrac{a^2-7a+6}{a+1}+(a^2-5a-6)i(a\in\mathbf{R})$ 为虚数，

所以$\begin{cases}a^2-5a-6\neq0,\\a+1\neq0,\end{cases}$

解得 $a\neq-1$ 且 $a\neq6$.

所以当 $a\in(-\infty,-1)\cup(-1,6)\cup(6,+\infty)$ 时，z 为虚数.

(3) 因为 $z=\dfrac{a^2-7a+6}{a+1}+(a^2-5a-6)i(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，

所以$\begin{cases}a^2-5a-6\neq0,\\a+1\neq0,\\a^2-7a+6=0,\end{cases}$　解得 $a=1$.

所以当 $a=1$ 时，z 为纯虚数.

6. B　【解析】由题意得 $\cos\alpha=-\cos2\alpha$，

即 $2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0$，

解得 $\cos\alpha=-1$ 或 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

$\because 0<\alpha<2\pi$，$\therefore \alpha=\pi$ 或 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$或 $\alpha=\dfrac{5\pi}{3}$.

故选 B.

7. C 【解析】若题中复数是纯虚数,则 $\begin{cases}a^2-a-2=0,\\|a-1|-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$,所以当 $a\neq -1$ 时,题中复数不是纯虚数.

8. D 【解析】因为 $a+bi=i^2+i$,所以 $a+bi=-1+i$,所以$\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}$ 所以 $a+b=0$. 故选 D.

9. C 【解析】$\because z_1=z_2$,

$\therefore \begin{cases}m=2\cos\theta,\\4-m^2=\lambda+3\sin\theta,\end{cases}$

$\therefore 4\sin^2\theta=\lambda+3\sin\theta$,

$\therefore \lambda=4\left(\sin\theta-\dfrac{3}{8}\right)^2-\dfrac{9}{16}$.

$\because -1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$,

$\therefore$ 当 $\sin\theta=\dfrac{3}{8}$ 时,λ 取得最小值 $-\dfrac{9}{16}$;

当 $\sin\theta=-1$ 时,λ 取得最大值 7,

$\therefore -\dfrac{9}{16}\leqslant\lambda\leqslant 7$,即 λ 的取值范围是 $\left[-\dfrac{9}{16},7\right]$.

10. -2 【解析】由题意可得

$\begin{cases}\lg(x^2-2x-2)>0,\\\lg(x^2+2x+1)=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}x^2-2x-2>1,\\x^2+2x+1=1,\end{cases}$ 解得 $x=-2$.

11. ABD 【解析】实数集和虚数集的交集是空集,故 C 错误;ABD 正确.

12. ABC 【解析】对于 A,复数 $z_1=m^2-1+(m+1)i$ 是纯虚数,则 $\begin{cases}m^2-1=0,\\m+1\neq 0,\end{cases}$ 所以 $m=1$,A 正确;

对于 B,若 $z_2=\cos 2\theta+i\sin\theta$ 为实数,则 $\sin\theta=0$,则 $\theta=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,B 正确;

对于 C,若 $z_1=z_2$,则$\begin{cases}m^2-1=\cos 2\theta,\\m+1=\sin\theta,\end{cases}$ 则 $m^2-1=1-2(m+1)^2$,解得 $m=0$ 或 $m=-\dfrac{4}{3}$,C 正确;

对于 D,若 $z_1\geqslant 0$,则 $m^2-1\geqslant 0$,且 $m+1=0$,则 $m=-1$,D 错误. 故选 ABC.

3.2 复数的四则运算

1. B 【解析】$z=i(3-2i)=3i-2i^2=2+3i$，故选 B.

2. C 【解析】$(1-i)(1-i^3)=(1-i)(1+i)=2$. 故选 C.

3. D 【解析】因为$(a+3i)+(2-i)=5+bi$，即$(a+2)+2i=5+bi$，所以$\begin{cases}a+2=5,\\b=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\b=2,\end{cases}$

所以 $a+b=5$. 故选 D.

4. D 【解析】$\because(1+\sqrt{3}i)z=(-\sqrt{3}+i)^2=2-2\sqrt{3}i$，$\therefore z=\dfrac{2(1-\sqrt{3}i)}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{2(1-\sqrt{3}i)^2}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=-1-\sqrt{3}i$，故选 D.

5. D 【解析】$\because z_1-z_2=(3+4i)-(-2-i)=5+5i$，且$f(z)=z$，

$\therefore f(z_1-z_2)=f(5+5i)=5+5i$.

6. C 【解析】因为 $2+ai$，$b+i$（i 是虚数单位）是实系数的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，

所以$\begin{cases}2+ai+b+i=-p,\\(2+ai)(b+i)=q,\end{cases}$

所以$\begin{cases}2+b=-p,\\a+1=0,\\2b-a=q,\\2+ab=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=2,\\p=-4,\\q=5.\end{cases}$故选 C.

7. D 【解析】设 $x=bi$（$b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq0$），因为 $2x-1+i=y-(3-y)i$，所以 $-1+(2b+1)i=y-(3-y)i$，则$\begin{cases}y=-1,\\2b+1=y-3,\end{cases}$

即$\begin{cases}y=-1,\\b=-\dfrac{5}{2},\end{cases}$所以 $x=-\dfrac{5}{2}i$，则 $x+y=-1-\dfrac{5}{2}i$.

8. C 【解析】若$\dfrac{1}{1-i}=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则$\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=a+bi$，根据复数相等的充要条件得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\b=\dfrac{1}{2},\end{cases}$所以 $a^b=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

9. $-2^{2\,020}(\sqrt{3}i+1)$ 【解析】$(\sqrt{3}i-1)^2=$

$-2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}=-2(\sqrt{3}\,\mathrm{i}+1)$，$(\sqrt{3}\,\mathrm{i}-1)^3=$

$-2(\sqrt{3}\,\mathrm{i}+1)(\sqrt{3}\,\mathrm{i}-1)=2^3=8$，

故 $(\sqrt{3}\,\mathrm{i}-1)^{2\,021}=$

$\dfrac{[(\sqrt{3}\,\mathrm{i}-1)^3]^{674}}{\sqrt{3}\,\mathrm{i}-1}=\dfrac{(2^3)^{674}}{\sqrt{3}\,\mathrm{i}-1}=$

$\dfrac{2^{2\,022}(\sqrt{3}\,\mathrm{i}+1)}{-4}=-2^{2\,020}(\sqrt{3}\,\mathrm{i}+1)$.

10.【解】方法一：原式 $=(1-2+3-4+\cdots-2\,020+2\,021)+(-2+3-4+5-\cdots+2\,021-2\,022)\mathrm{i}$

$=(2\,021-1\,010)+(1\,010-2\,022)\mathrm{i}$

$=1\,011-1\,012\mathrm{i}$.

方法二：$(1-2\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，

$(3-4\mathrm{i})+(-4+5\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，

…

$(2\,019-2\,020\mathrm{i})+(-2\,020+2\,021\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$.

相加得原式 $=1\,010(-1+\mathrm{i})+(2\,021-2\,022\mathrm{i})=1\,011-1\,012\mathrm{i}$.

11. ABD【解析】对于 A，由 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+1=\cos x+\mathrm{i}\sin x+1$ 不一定为 0，故 A 错误；

对于 B，$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2-\dfrac{1}{4}=-1$，故 B 错误；

对于 C，$\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}\mathrm{i}$，故 C 正确；

对于 D，$\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}=\dfrac{\cos x+\mathrm{i}\sin x+\cos(-x)+\mathrm{i}\sin(-x)}{2}=\cos x$，故 D 错误.

3.3 复数的几何表示

1. A【解析】由题意，复数 $z=\dfrac{1-7\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-7\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-3-4\mathrm{i}$，可得 $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$，所以 A 正确；复数 z 在复平面上对应的点 $(-3,-4)$ 位于第三象限，所以 B 错误；复数 $z=-3-$

$4i$ 的实部为 -3，虚部为 -4，可得实部与虚部之积为 12，所以 C 错误；复数 $z=-3-4i$ 的共轭复数为 $\bar{z}=-3+4i$，所以 D 错误. 故选 A.

2. C 【解析】对于 A 选项，z 是复数，$|z|$ 是实数，二者不一定相等，A 选项错误；

对于 B 选项，$|2+3i|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，$|1-4i|=\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$，则 $|2+3i|<|1-4i|$，B 选项错误；

对于 C 选项，$|2-i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}>-2=2i^2$，C 选项正确；

对于 D 选项，$i^2=-1<1=|-i|$，D 选项错误.

3. $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】由题意可得 $\boldsymbol{m}=(3,-3)$，$\boldsymbol{n}=(0,7)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-21}{3\sqrt{2}\times7}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\in[0,\pi]$，所以向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$.

4. 2 【解析】因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{BD}$ 对应的复数是 $1+i-(1-i)=2i$，故 $|\overrightarrow{BD}|=2$.

5. 6 【解析】因为复数 $z=3+2i$，所以其共轭复数 $\bar{z}=3-2i$，所以点 $A(3,2)$，$B(3,-2)$，

所以 $\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times3\times[2-(-2)]=6$.

6. $2\sqrt{2}$ 【解析】由题意知，$z_1+z_2=-2$，$z_1z_2=3$，$(z_1-z_2)^2=(z_1+z_2)^2-4z_1z_2=4-12=-8$，故 $z_1-z_2=\pm2\sqrt{2}i$，

所以 $|z_1-z_2|=2\sqrt{2}$.

7. B 【解析】复数 $-1+2i$ 在复平面内对应的点为 $A(-1,2)$，点 A 关于直线 $y=-x$ 的对称点为 $B(-2,1)$，所以向量 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $-2+i$.

8. D 【解析】$\because z=\frac{a+i}{2+i}=\frac{(a+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2a+1}{5}+\frac{2-a}{5}i$，

其在复平面内对应的点位于第一象限，

$\therefore\begin{cases}2a+1>0,\\2-a>0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2}<a<2$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2},2\right)$.

故选 D.

9. C 【解析】因为 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，所以 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$，故 $\triangle OZ_1Z_2$ 是直角三角形，

所以 $|z_1|^2+|z_2|^2=|\overrightarrow{OZ_1}|^2+|\overrightarrow{OZ_2}|^2=|\overrightarrow{Z_1Z_2}|^2=4|\overrightarrow{OZ}|^2$. 易知 $|\overrightarrow{OZ}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，所以 $4|\overrightarrow{OZ}|^2=4\times25=100$.

10. B 【解析】因为复数 $z_1=3-4i$，$z_2=4-2i$，$\bar{z}_3=2+i$，

所以 $|z_1|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，$z_3=2-i$，

所以 $\frac{|z_1|-z_2}{z_3}=\frac{5-(4-2i)}{2-i}=\frac{1+2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5i}{5}=i$. 故选 B.

11. ABC 【解析】当 $z_1=\pm i$ 时满足 $z_1^2+1=0$，A 错误；当 $z_1=1+i$，$z_2=1-i$ 时满足 $|z_1|=|z_2|$，但 $z_1\neq\pm z_2$，B 错误；复数 $z=a+bi$，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，复数 z 为实数，不是纯虚数，C 错误；令 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$，当 $|z_1+z_2|=0$ 时，即 $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}=0$，$a=-c$，$b=-d$，则 $z_1=-z_2$ 成立，D 正确. 故选 ABC.

12. BC 【解析】当 $a=0$ 时，$b=1$，此时 $z=i$ 为纯虚数，A 错误；若 z 的共轭复数为 $\bar{z}$，且 $z=\bar{z}$，则 $a+bi=a-bi$，因此 $b=0$，B 正确；由 $|z|$ 是实数，且 $z=|z|$ 知，z 是实数，C 正确；由 $|z|=\frac{1}{2}$ 得 $a^2+b^2=\frac{1}{4}$，又 $a+b=1$，因此 $8a^2-8a+3=0$，$\Delta=64-4\times8\times3=-32<0$，无解，即 $|z|$ 不可以等于 $\frac{1}{2}$，D 错误. 故选 BC.

*3.4 复数的三角表示

1. B 【解析】$-1-\sqrt{3}i=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$. 故选 B.

2. D 【解析】因为 $\cos\theta+i\sin\theta=\sin\theta+i\cos\theta$，所以 $\cos\theta=\sin\theta$，即 $\tan\theta=1$，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

3. $\dfrac{\pi}{3}$ 【解析】因为 $z_1=-\sqrt{3}+i$, $2iz=z_1$,

所以 $z=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2i}=\dfrac{(-\sqrt{3}+i)(-i)}{2i(-i)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{3}i$,所以复数 z 的辐角主值为$\dfrac{\pi}{3}$.

4. $1-i$ 【解析】$(1+i)\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$=1-i$.

5. 【解】(1)原式 $=2\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left[\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right]$(答案不唯一).

(2)原式 $=8\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=4\sqrt{3}-4i$.

6. B 【解析】因为 $z=(a+i)^2=(a^2-1)+2ai$, $\arg z=\dfrac{3\pi}{2}$,所以$\begin{cases}a^2-1=0,\\a<0,\end{cases}$

所以 $a=-1$,故选 B.

7. C 【解析】$\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\times 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=3\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

8. B 【解析】$9(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)\div[3(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)]=-9\div 3=-3$. 故选 B.

9. C 【解析】由题意,得 $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^n=\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}=\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}$. 由复数相等的充要条件,

得$\begin{cases} \cos\dfrac{n\pi}{3}=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}, \\ \sin\dfrac{n\pi}{3}=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$

解得$\dfrac{n\pi}{3}=2k\pi-\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{N}_+)$，

$\therefore n=6k-1(k\in\mathbf{N}_+)$.

10. AC 【解析】对于 A 选项，$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则 $z^2=r^2(\cos2\theta+\mathrm{i}\sin2\theta)$，可得 $|z^2|=|r^2(\cos2\theta+\mathrm{i}\sin2\theta)|=r^2$，$|z|^2=|r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)|^2=r^2$，A 选项正确；

对于 B 选项，当 $r=1,\theta=\dfrac{\pi}{3}$时，$z^3=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3=\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$，B 选项错误；

对于 C 选项，当 $r=1,\theta=\dfrac{\pi}{3}$时，$z=\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，

则 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，C 选项正确；

对于 D 选项，$z^n=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta=\cos\dfrac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}$，

取 $n=4$，则 n 为偶数，$z^4=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$，不是纯虚数，D 选项错误.